# Σεμινάριο Γεωμετρίας 2020-2021: Higher signatures

Διοργανωτής:Ιάκωβος Ανδρουλιδάκης

21 Ιουλίου 2020

Το κλασικό θεώρημα του Sylvester (Sylvester's law of inertia) μας λέει πως κάθε συμμετρικός πίνακας μπορεί να γραφεί, αν επιλέξουμε κατάλληλη βάση, ως διαγώνιος με τα στοιχεία της διαγωνίου να ανήκουν στο σύνολο $\{-1, 0, 1\}$. Επιπλέον, το πλήθος καθενός από τα τρία αυτά στοιχεία στη διαγώνιο δεν εξαρτάται από την επιλογή της βάσης. Αν ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος, τότε δεν υπάρχουν μηδενικά στην περιγραφή αυτή. Η διαφορά του πλήθους των -1 από τα 1 ονομάζεται *υπογραφή* του πίνακα (ή της τετραγωνικής μορφής που ορίζει) [1].

Αν $M^{4k}$ μια συμπαγής, προσανατολισμένη πολλαπλότητα, τότε το cup product μας δίνει μια τετραγωνική μορφή στον χώρο $H^{2k}(M;\mathbb{R})$, η οποία είναι μάλιστα μη εκφυλισμένη, λόγω δυαδικότητας Poincare. Η τετραγωνική αυτή μορφή, που ονομάζεται intersection form, εμπεριέχει πολλές γεωμετρικές πληροφορίες για την $M$. Μάλιστα για $k = 1$ καθορίζει τοπολογικά την πολλαπλότητα. Η υπογραφή αυτής της τετραγωνικής μορφής ονομάζεται *υπογραφή της πολλαπλότητας*.

Η υπογραφή, όπως προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της είναι ομοτοπική αναλλοίωτη. Ο Thom παρατήρησε επιπλέον, πως αν μια πολλαπλότητα είναι σύνορο, τότε αυτή έχει μηδενική υπογραφή και συνδυάζοντας αυτή την παρατήρηση με τον υπολογισμό του cobordism group που είχε κάνει, οι μοναδικές αναλλοίωτες του οποίου είναι οι αριθμοί Pontryagin, κατέληξε στο συμπέρασμα πως η υπογραφή εκφράζεται ως πολυώνυμο των αριθμών Pontryagin[2]. Ο Hirzebruch υπολόγισε τα πολυώνυμα αυτά και το αποτέλεσμα είναι πλέον γνωστό ως Hirzebruch's signature formula. Η φόρμουλα αυτή έχει πολλές εφαρμογές και η ανάγκη να βρέθεί μια εγγενής απόδειξή της , χωρίς τη χρήση του cobordism group, ήταν ένα απο τα βασικά κίνητρα που οδήγησαν τους

Atiyah και Singer στην έρευνα που κατέληξε στο περίφημο ομώνυμο θεώρημα. Ένα άμεσο πόρισμα της φόρμουλας αυτής, αν συνδυαστεί με το ομοτοπικό αναλλοίωτο της υπογραφής, είναι πως αυτά τα πολυώνυμα των κλάσεων Pontryagin είναι ομοτοπικά αναλλοίωτα, ενώ οι κλάσεις μόνες τους, όπως ήταν ήδη γνωστό, δεν είναι.

Αυτή η τελευταία παρατήρηση οδηγεί στο εύλογο πρόβλημα της εύρεσης όλων των πολυωνύμων των κλάσεων που είναι ομοτοπικά αναλλοίωτα ή σωστότερα ποιο ¨κομμάτι' των πολυωνύμων αυτών είναι. Ο S. Novikov έκανε συγκεκριμένο αυτό το πρόβλημα, περιγράφοντας κάποιες συγκεκριμένες κλάσεις συνομολογίας οι οποίες προκύπτουν συνδυάζοντας τα πολυώνυμα του Hirzebruch με κάποιες κλάσεις που σχετίζονται με τη θεμελιώδη ομάδα της πολλαπλότητας. Οι κλάσεις αυτές ονομάζοντα *ανώτερες υπογραφές* και η εικασία πως είναι ομοτοπικές αναλλοίωτες φέρει το όνομα του Novikov [3].

Μια ενοποιητική και με σύγχρονους όρους αφηρημένη περιγραφή των διάφορων προσεγγίσεων στην εικασία είναι η ακόλουθη. Κατασκευάζεται καταρχάς μια απεικόνιση (assemply map) που στέλνει αυτές τις υπογραφφές σε μια ομάδα η οποία ομοτοπικά αναλλοίωτη. Η κατασκευή αυτή είναι πολύ δύσκολη γενικά και απαιτεί σημαντικά εργαλεία. Έπειτα η εικασία προκύπτει ως πόρισμα μιας γενικότερης εικασίας, που λέει πως η απεικόνιση αυτή είναι 1 προς 1. Στην πιο τοπολογική προσέγγιση στο πρόβλημα, που ξεκίνησε από τον ίδιο τον Novikov και βασίζεται στα *χειρουργεία σε πολλαπλότητες* που εισήχθησαν από τον Milnor, οι ομάδες προς της οποίες απεικονίζει ο assembly map είναι τα L-surgery groups [4]. Η δεύτερη βασική προσέγγιση στο πρόβλημα βασίζεται στη χρήση ελλειπτικών (ψευδο)διαφορικών τελεστών. Οι Atiyah-Singer κατάφεραν να εκφράσουν την υπογραφή ως το δείκτη ενός κατάλληλου διαφορικού τελεστή. Ως αποτέλεσμα πήραν την εναλλακτική απόδειξη για τη φόρμουλα του Hirzebruch. Συνεχίζοντας τις ιδέες αυτές ο Lusztig κατάφερε να εκφράσει τις ανώτερες υπογραφές συγκεκριμένω πολλαπλοτήτων ως το δείκτη κάποιων ελλειπτικών τελεστών, αποδεικνύοντας έτσι την εικασία για τις πολλαπλότητες αυτές, ως αποτέλεσμα του ομοτοπικού αναλλοιώτου του δείκτη. Η προσέγγιση αυτή, που εξελίχθηκε ιδιαίτερα από τον A. Connes και τη σχολή της μη μεταθετικής γεωμετρίας, κατέληξε σην κατασκευή ενός άλλου assembly map, με όρους K-θεωρίας $C^*$-αλγεβρών, που έχει εκτός των άλλων το πλεονέκτημα πως συνδέει την εικασία του Novikov με μια άλλη σειρά εικασιών σε τελείως διαφορετικούς, εκ των προτέρων, κλάδους [5].

Σκοπός του σεμιναρίου είναι να κατανοήσουμε τις βασικές τεχνικές που σχετίζονται με το πρόβλημα καθώς και τις συνέπειες που έχει η εικασία για την ταξινόμηση των πολλαπλοτήτων. Τα προαπαιτούμενα για την παρακολούθησή του είναι πρωτίστως μαθηματική ωριμότητα και ενδιαφέρον για την τοπολογία, καθώς και επαφή με τα αντικείμενα της διαφορικής τοπολογίας και αλγεβρικής τοπολογίας στο επίδεδο των [6] και [7] αντίστοιχα.

# Αναφορές


[1] E. Ghys, A. Ranicki, Signatures in algebra, topology and dynamics

[2] R. Thom, Some global properties of differentiable manifolds

[3] M. Kreck, W. Luck, The Novikov conjecture:Geometry and Algebra

[4] C.T.C. Wall, Surgery on compact manifolds

[5] A. Connes, Noncommutative geometry

[6] C.T.C. Wall, Differential topology

[7] A. Hatcher, Algebraic topology